Ostfalia
Hochschule für angewandte
Wissenschaften

Mehr Prüfen als nur Algorithmen – Ein Einblick in alternative Prüfungsaufgaben

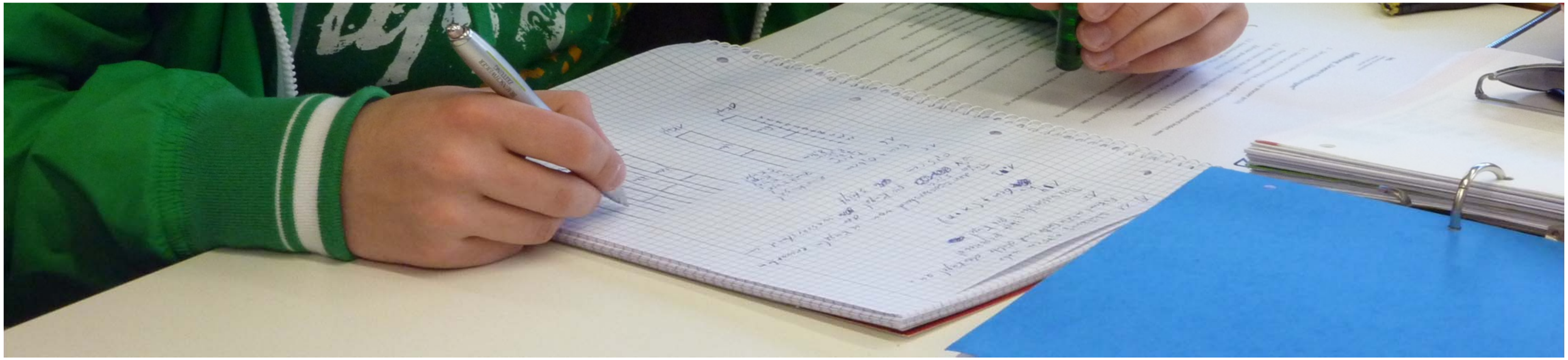
Anika Fricke[1], Peter Riegler[1,2]

[1]ZeLL – Zentrum für erfolgreiches Lehren und Lernen, [2]Fakultät Informatik

Salzgitter
Suderburg
Wolfenbüttel
Wolfsburg

Agenda

- Beschreiben des Prozesses, wie diese neue Art von Prüfungsaufgaben entstanden ist.
- Vorstellen einer Beispielaufgabe.



ENTSTEHUNG NEUER PRÜFUNGSAUFGABEN

Entstehungsprozess

- Wahrnehmen von Schwierigkeiten von Studierenden.

  Entnehmen von Informationen aus mathematischen Texten

- Durch Zuhören bei Peer Instruction (PI) und Just-in-Time Teaching (JiTT) mehr über Schwierigkeiten der Studierenden erfahren.

  Die Studierenden haben Probleme, gelesene mathematische Informationen angemessen aufzunehmen und umzusetzen

- Entscheidung, welche dieser Schwierigkeiten wertvoll sind, überwunden zu werden.

  Lesefähigkeiten

Entstehungsprozess

- Ergänzen der Lernzielmatrix, um die identifizierten Schwierigkeiten.

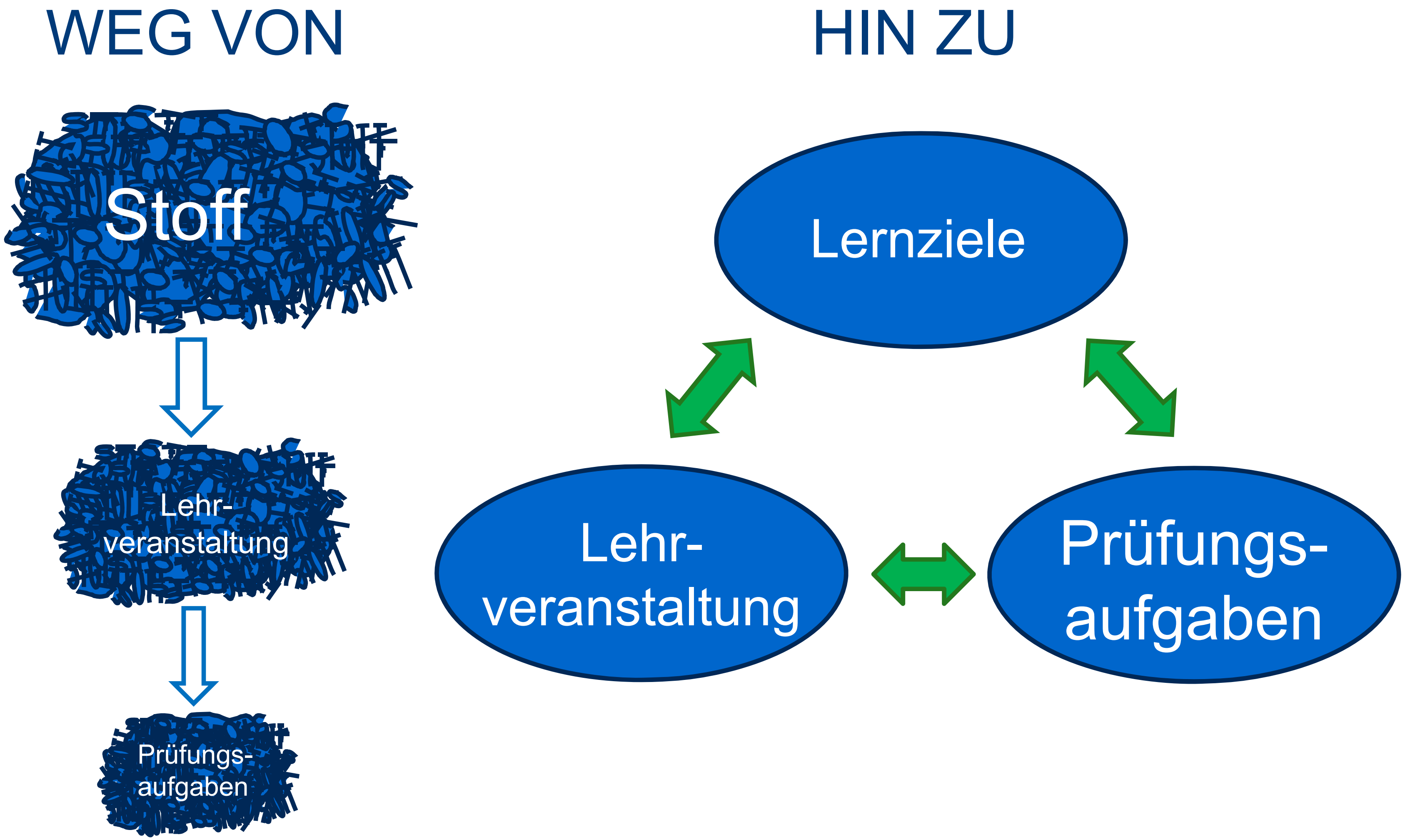
  Die Studierenden sollen „Aus Texten Inhalte erarbeiten („konstruieren“) können“

- Umstellen der Lehrveranstaltung, um den Studierenden zu helfen, die erkannten Probleme zu bewältigen.

  Inverted Classroom, Lesehausaufgabe

- Auf Grund von „testing drives learning“ genügt es nicht, die Lehrveranstaltung umzustellen. Die Lernziele müssen auch in der Klausur abgeprüft werden und die Praktiken der Lehrveranstaltung müssen für die Klausurbearbeitung relevant sein.

  Aufgabe zum Lesen in Klausur


WEG VON
HIN ZU
Stoff
Lehr-
veranstaltung
Prüfungs-
aufgaben
Lernziele
Lehr-
veranstaltung
Prüfungs-
aufgaben

BEISPIELAUFGABE ZU DIESEM PROZESS

Lernzielmatrix

Lernziel	„Kennen“ Erworbenes Wissen abfragen und ggf. umformen	„Können“ Gelerntes übertragen, zerlegen und kombinieren, einsetzen	„Verstehen und Anwenden“ Wissen hinterfragen und/oder bewerten, Zusammenhänge und Auswirkungen erläutern
Fachlich	• Fachbegriffe • typ. Frage-stellungen • typ. Anwendungs-gebiete benennen können	• Algorithmen der Differentiation + Integration • Grenzwertbildung ausführen können	• Studierende haben Verständnis von Funktionen auf Prozess-Niveau • Beurteilen, ob Variable, Parameter etc. • Erkennen, wann Aufgabenstellung zum Fach gehört und wann ein Fachmann zu kontaktieren ist.
Methodisch	• Beispiele von Abstraktion benennen	• Aus Texten Inhalte erarbeiten („konstruieren“) können • IATT(Lawson)-Schema zum Hypothesentesten/Argumentieren benutzen	• Analysieren, beurteilen was im Selbststudium unklar geblieben ist • Verknüpfungen zwischen Konzepten konstruieren können mit dem Ziel, Kohärenz/Konstanz als verbindliches Fundament zu sehen
Sozial		• Gutes Argument konstruieren können • How-do-you-know-Fragen beantworten • Selbstbewusstsein	• Zentrale Konzepte und deren Formalisierung erklären können (z.B. Änderungsrate)
Persönlich		• Epistemologische Fragen (Why is this worth learning) beantworten • Kontinuierliches Arbeiten	• Verantwortung für Lernprozess übernehmen

Aufgabenbeispiel

Da Differentiation eine lineare Abbildung ist, kann sie mit Hilfe einer Matrix dargestellt werden.

Hier am Beispiel der Differentiation von Polynomen dritten Grades erläutert.

Die zugehörige Matrix D lautet dann:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 (nur Lineare Algebra und Modulprüfung) (Punkte: 5+1+3+2+3+1)

Lesen Sie sich zunächst den folgenden Text durch und beantworten Sie dann die nachfolgende Aufgabenstellung:

Die Differentiation ist eine Abbildung, die jeder differenzierbaren Funktion ihre Ableitungsfunktions zuweist. Wegen

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$$

für beliebige Funktionen f und g und Skalare α und β ist die Differentiation eine lineare Abbildung. Da jede lineare Abbildung durch eine Matrix dargestellt werden kann, kann auch die Differentiation mittels Matrix dargestellt werden. Wir tun dies am Beispiel von Polynomen vom (maximalen) Grad 3 und ennen die entsprechende Matrix $\underline{\underline{D}}$.

Jedes Polynom vom Grad 3

$$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

kann eineindeutig als Viertupel

$$\underline{p} = (a_3, a_2, a_1, a_0)^\top$$

dargestellt werden. Die erste Komponente dieses Tupels ist also der Koeffizient a_3 des Polynoms p, die zweite Komponente ist der Koeffizient a_2 usw.

Die Ableitungsfunktion p' des Polynoms $p(x)$ ist durch den Ausdruck

$$p'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$$

gegeben, wird also durch das Tupel

$$\underline{p}' = (0, 3a_3, 2a_2, a_1)^\top$$

repräsentiert.

Die Matrix $\underline{\underline{D}}$, die die Differentiation repräsentiert, muss $\underline{p}' = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{p}$ erfüllen und daher eine 4×4-Matrix sein. Das bedeutet

$$\begin{aligned} \underline{\underline{D}} \cdot \underline{p} &= \begin{pmatrix} D_{1,1} & D_{1,2} & D_{1,3} & D_{1,4} \\ D_{2,1} & D_{2,2} & D_{2,3} & D_{2,4} \\ D_{3,1} & D_{3,2} & D_{3,3} & D_{3,4} \\ D_{4,1} & D_{4,2} & D_{4,3} & D_{4,4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_0D_{1,4} + a_1D_{1,3} + a_2D_{1,2} + a_3D_{1,1} \\ a_0D_{2,4} + a_1D_{2,3} + a_2D_{2,2} + a_3D_{2,1} \\ a_0D_{3,4} + a_1D_{3,3} + a_2D_{3,2} + a_3D_{3,1} \\ a_0D_{4,4} + a_1D_{4,3} + a_2D_{4,2} + a_3D_{4,1} \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 3a_3 \\ 2a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \underline{p}' \end{aligned}$$

Weil die Koeffizienten a_3, a_2, a_1, a_0 beliebig sind, lassen sich daraus direkt die Koeffizienten der Matrix $\underline{\underline{D}}$ ablesen und wir erhalten

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabenbeispiel – Analyse der Teilaufgaben

a) Von welchen der folgenden Funktionen kann mit Hilfe der Matrix D die Ableitung berechnet werden? Begründen Sie Ihre Antwort und berechnen Sie die Ableitung mit Hilfe der Matrix D, falls dies möglich ist.
$f(x) = -5x^3, \quad g(x) = -5x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 1, \; h(x) = \cos(x) \cdot x^2$

Aus Texten Inhalte erarbeiten können:

- Erkennen, dass es nur für Polynome dritten Grades geht
- Verstehen, wie man ein gegebenes Polynom in den entsprechenden Vektor umwandelt und umgekehrt
- Mit eigenen Worten formulieren, warum die Ableitungen berechnet werden können bzw. nicht berechnet werden können.

Funktionenkonzept für f, g, h, und D, außerdem erkennen, dass $\cos(x)$ eine Funktion in Abhängigkeit von x ist und kein Koeffizient

Algorithmus für Matrix-Vektor-Multiplikation

Aufgabenbeispiel – Analyse der Teilaufgaben

b) Zeigen Sie, dass der Rang der Matrix D kleiner 4 ist.

Algorithmus kennen zum Bestimmen des Rangs einer Matrix

c) Welche Konsequenz hat Rang(D) < 4 für die Lösung des LGS $D \cdot y = (0, 1, 1, 1)^T$?

Wissen, was es bedeutet, dass der Rang kleiner als die Dimension ist

d) Kann man zu Ihrer Antwort auf Teil (c) auch ausgehend von der Differential- und Integralrechnung kommen? Wenn ja, wie?

Den Zusammenhang zwischen der Integration und der Lösbarkeit eines LGS verstehen (Verknüpfung zwischen Konzepten konstruieren können)

Aufgabenbeispiel – Analyse der Teilaufgaben

e) Lösen Sie das LGS $D \cdot y = (0, 1, 1, 1)^T$ mit einer Methode Ihrer Wahl.

Algorithmus zum Lösen von LGS

f) Welche Rolle hat y in $D \cdot y = (0, 1, 1, 1)^T$?
(A) Konstante (B) Parameter (C) Unbekannte (D) Variable
Begründen Sie Ihre Antwort!

Beurteilen, ob Variable, Parameter etc.
Verbalisieren

Weitere Beispiele

a) Nennen Sie eine Linearkombination (in Spaltentupelform) von $(1,-3,-4)^T$ und $(7,-9,-9)^T$.

b) Ist die von Ihnen genannte Linearkombination linear abhängig oder linear unabhängig von $(1,-3,-4)^T$ und $(7,-9,-9)^T$? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Nennen Sie einen Vektor (in Spaltentupelform), der orthogonal zu $(1,-3,0)^T$ ist.

d) Nennen Sie eine Matrix C, so dass die Multiplikation $C \cdot B$ mit $B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$ ausführbar ist.

e) Nennen Sie ein Beispiel für eine (2×3)-Matrix, deren Rang gleich 1 ist.

f) Nennen Sie ein Beispiel für $c \in \mathbb{R}^3$ mit $|c| = \sqrt{5}$.

Literatur

- C. C. Cowen,
  Teaching and Testing Mathematics Reading,
  Amer. Math. Monthly **98** (1991) 50-53. (Beispiele wie man Lesefähigkeiten in Klausuren abprüfen kann)
- S. Vinner, Mathematics Education –
  Procedures, Rituals and Man's Search for Meaning
  http://www.fisme.science.uu.nl/nwd/nwd2003/handouts/vinner.pdf
- R. Dubs,
  Besser schriftlich prüfen: Prüfungen valide und zuverlässig durchführen.
  In: Berendt, B. (Hrsg.) ; Voss, H. P. (Hrsg.) ; Wildt, J. (Hrsg.): Neues Handbuch Hochschullehre. Berlin : Raabe, 2006, S. Lieferung 22, Ziffer H 5.1, 1-26.

Danke für Ihr Interesse und Ihre Fragen!

www.ostfalia.de/zell

GEFÖRDERT VOM

Dieses Vorhaben wird aus Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung unter den Förderkennzeichen 01PL11059 und 01PL11066H gefördert. Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung liegt beim Autor.

Bundesministerium
für Bildung
und Forschung