Mehr Prüfen als nur Algorithmen – Ein Einblick in alternative Prüfungsaufgaben

Anika Fricke[1], Peter Riegler[1,2]

[1]ZeLL – Zentrum für erfolgreiches Lehren und Lernen,

[2]Fakultät Informatik

Wie man zu neuen Prüfungsaufgaben kommen kann:

1. Wahrnehmen von Schwierigkeiten von Studierenden.
2. Durch Zuhören bei Peer Instruction (PI) und Just-in-Time Teaching (JiTT) mehr über Schwierigkeiten der Studierenden erfahren.
3. Entscheidung, welche diese Schwierigkeiten wertvoll sind, überwunden zu werden.
4. Ergänzen der Lernzielmatrix , um die identifizierten Schwierigkeiten.
5. Umstellen der Lehrveranstaltung, um den Studierenden zu helfen die erkannten Probleme zu bewältigen.
6. Auf Grund von „testing drives learning“ genügt es nicht die Lehrveranstaltung umzustellen. Die Lernziele müssen auch in der Klausur abgeprüft werden und die Praktiken der Lehrveranstaltung müssen für die Klausurbearbeitung relevant sein.

Lernziele:

Lernziele helfen dabei, Prüfungsaufgaben zu entwickeln. Sie unterstützen sowohl Lehrende als auch Lernenden dabei, sich über die angestrebten Ziele der Veranstaltung im Klaren zu sein und dementsprechend zu agieren.
Lernzielmatrizen helfen, vorhandene Lernziele zu klassifizieren, um einerseits vielseitigere Aufgaben zu erhalten und andererseits nicht der bloßen Wissensabfrage zu verfallen.
Es gibt verschiedene Ausprägungen von Lernzielmatrizen. Die vorgestellte Lernzielmatrix unterscheidet drei verschiedene Stufen kognitiver Prozesse.

1. „Kennen“: Erworbenes Wissen abfragen und ggf. umformen.
2. „Können“: Gelerntes übertragen, zerlegen und kombinieren, einsetzen.
3. „Verstehen und Anwenden“: Wissen hinterfragen und/oder bewerten, Zusammenhänge und Auswirkungen erläutern.

In jeder dieser Stufen wird weiterhin der zu lernende Inhalt in einer der folgenden vier Stufen einsortiert: Fachlich, methodisch, sozial oder persönlich.

Aufgabenbeispiele:

Aufgabe 6 (nur Lineare Algebra und Modulprüfung) (Punkte: 5+1+3+2+3+1)

Lesen Sie sich zunächst den folgenden Text durch und beantworten Sie dann die nachfolgende Aufgabenstellung:

Die Differentiation ist eine Abbildung, die jeder differenzierbaren Funktion ihre Ableitungsfunktions zuweist. Wegen

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$$

für beliebige Funktionen f und g und Skalare α und β ist die Differentiation eine lineare Abbildung. Da jede lineare Abbildung durch eine Matrix dargestellt werden kann, kann auch die Differentiation mittels Matrix dargestellt werden. Wir tun dies am Beispiel von Polynomen vom (maximalen) Grad 3 und ennen die entsprechende Matrix $\underline{\underline{D}}$.

Jedes Polynom vom Grad 3

$$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

kann eineindeutig als Viertupel

$$\underline{p} = (a_3, a_2, a_1, a_0)^\top$$

dargestellt werden. Die erste Komponente dieses Tupels ist also der Koeffizient a_3 des Polynoms p, die zweite Komponente ist der Koeffizient a_2 usw.

Die Ableitungsfunktion p' des Polynoms $p(x)$ ist durch den Ausdruck

$$p'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$$

gegeben, wird also durch das Tupel

$$\underline{p}' = (0, 3a_3, 2a_2, a_1)^\top$$

repräsentiert.

Die Matrix $\underline{\underline{D}}$, die die Differentiation repräsentiert, muss $\underline{p}' = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{p}$ erfüllen und daher eine 4×4-Matrix sein. Das bedeutet

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{D}} \cdot \underline{p} &= \begin{pmatrix} D_{1,1} & D_{1,2} & D_{1,3} & D_{1,4} \\ D_{2,1} & D_{2,2} & D_{2,3} & D_{2,4} \\ D_{3,1} & D_{3,2} & D_{3,3} & D_{3,4} \\ D_{4,1} & D_{4,2} & D_{4,3} & D_{4,4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_0D_{1,4} + a_1D_{1,3} + a_2D_{1,2} + a_3D_{1,1} \\ a_0D_{2,4} + a_1D_{2,3} + a_2D_{2,2} + a_3D_{2,1} \\ a_0D_{3,4} + a_1D_{3,3} + a_2D_{3,2} + a_3D_{3,1} \\ a_0D_{4,4} + a_1D_{4,3} + a_2D_{4,2} + a_3D_{4,1} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 3a_3 \\ 2a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \underline{p}'
\end{aligned}$$

Weil die Koeffizienten a_3, a_2, a_1, a_0 beliebig sind, lassen sich daraus direkt die Koeffizienten der Matrix $\underline{\underline{D}}$ ablesen und wir erhalten

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Von welchen der folgenden Funktionen kann mit Hilfe der Matrix D die Ableitung berechnet werden? Begründen Sie Ihre Antwort und berechnen Sie die Ableitung mit Hilfe der Matrix D, falls dies möglich ist.
$f(x) = -5x^3$, $g(x) = -5x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 1$, $h(x) = \cos(x) \cdot x^2$

b) Zeigen Sie, dass der Rang der Matrix D kleiner 4 ist.

c) Welche Konsequenz hat Rang(D) < 4 für die Lösung des LGS
$D \cdot y = (0,\ 1,\ 1,\ 1)^T$?

d) Kann man zu Ihrer Antwort auf Teil (c) auch ausgehend von der Differential- und Integralrechnung kommen? Wenn ja, wie?

e) Lösen Sie das LGS $D \cdot y = (0,\ 1,\ 1,\ 1)^T$ mit einer Methode Ihrer Wahl.

f) Welche Rolle hat y in $D \cdot y = (0,\ 1,\ 1,\ 1)^T$?
(A) Konstante (B) Parameter (C) Unbekannte (D) Variable
Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 8

a) Nennen Sie eine Linearkombination (in Spaltentupelform) von $(1,-3,-4)^T$ und $(7,-9,-9)^T$.

b) Ist die von Ihnen genannte Linearkombination linear abhängig oder linear unabhängig $(1,-3,-4)^T$ und $(7,-9,-9)^T$? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Nennen Sie einen Vektor der (in Spaltentupelform), der orthogonal zu $(1,-3,0)^T$ ist.

d) Nennen Sie eine Matrix C, so dass die Multiplikation $C \cdot B$ mit

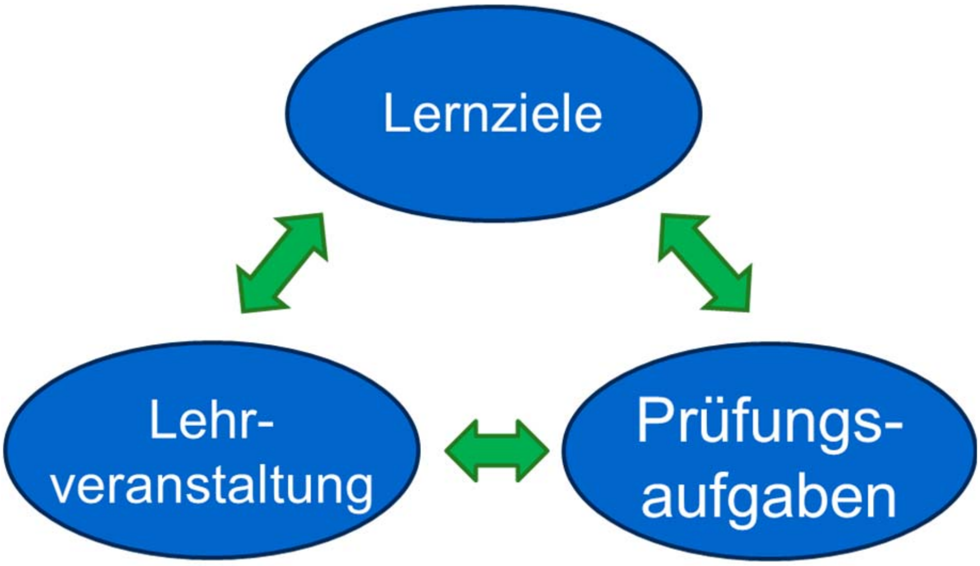
$$B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

ausführbar ist.

e) Nennen Sie ein Beispiel für eine (2×3)-Matrix, deren Rang gleich 1 ist.

f) Nennen Sie ein Beispiel für $c \in \mathbb{R}^3$ mit $|c| = \sqrt{5}$.

Angestrebtes Schema



Literatur

- C. C. Cowen,
  Teaching and Testing Mathematics Reading,
  Amer. Math. Monthly **98** (1991) 50-53. (Beispiele wie man Lesefähigkeiten in Klausuren abprüfen kann)

- S Vinner, Mathematics Education –
  Procedures, Rituals and Man's Search for Meaning
  http://www.fisme.science.uu.nl/nwd/nwd2003/handouts/vinner.pdf

- R. Dubs,
  Besser schriftlich prüfen: Prüfungen valide und zuverlässig durchführen.
  In: Berendt, B. (Hrsg.) ; Voss, H. P. (Hrsg.) ; Wildt, J. (Hrsg.): Neues Handbuch Hochschullehre.
  Berlin : Raabe, 2006, S. Lieferung 22, Ziffer H 5.1, 1-26.

Dieses Vorhaben wird aus Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung unter den Förderkennzeichen 01PL11059 und 01PL11066H gefördert. Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung liegt beim Autor.

GEFÖRDERT VOM
Bundesministerium für Bildung und Forschung