Ostfalia
Hochschule für angewandte Wissenschaften

ZeLL - Zentrum für erfolgreiches Lehren und Lernen

Constructively aligned Prüfungen in der Ingenieurmathematik

Mehr Prüfen als vorrangig Algorithmen

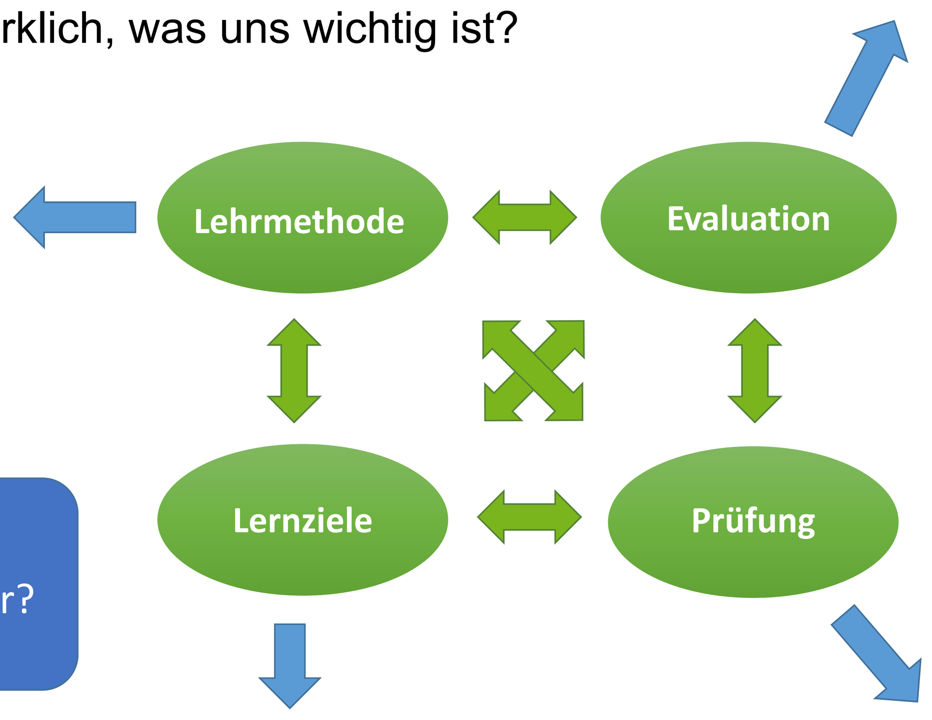
Anika Fricke, Kathrin Gläser, Peter Riegler

Constructive Alignment in einem Modul zur Linearen Algebra und Analysis in der Informatik

Mathematik-Lehrende beklagen einerseits die Algorithmen-Orientiertheit ihrer Studierenden. Andererseits bestehen Prüfungen oft vor allem aus Aufgaben, die Algorithmen abprüfen. Wie kein anderer Faktor steuern aber die Prüfungsinhalte das Lernverhalten von Studierenden.

Testing drives learning! Prüfen wir wirklich, was uns wichtig ist?

Interactive Engagement
- *Peer Instruction*
- *Just in Time Teaching*



„Aus Texten Inhalte erarbeiten"
Unbedingt notwendig, aber wie prüfbar?

Lernziel	"Kennen" - Erworbenes Wissen abfragen und ggf. umformen	"Können" - Gelerntes übertragen, zerlegen und kombinieren, einsetzen	"Verstehen und Anwenden" - Wissen hinterfragen und/oder bewerten, Zusammenhänge und Auswirkungen erläutern
Fachlich	• Fachbegriffe, typische Fragestellungen, typische Anwendungsgebiete der linearen Algebra und von Abbildungen benennen • Wissenschaftliche Bedeutung von Abstraktion erläutern	• In der Lehrveranstaltung behandelte Algorithmen ausführen (z. B. Skalarprodukt, Projektion, Verkettung, Gauß-Algorithmus, Rangbestimmung) • Zusammenhang zwischen Situationen (z. B. Alltagssituationen oder Situationen in Aufgabenstellungen) und mathematischen Strukturen (wie z. B. Vektorraum, (In-)Homogenität, Linearität) herstellen • Geeignete Darstellungsform bei Problembearbeitung finden • ***Beispiele zu gegebenen Konzepten benennen können (z. B. „Nennen Sie Matrix von Rang 42.")*** • ***Mathematische Objekte in verschiedene Darstellungsformen transformieren***	• ***Zusammenhänge zwischen Konzepten erläutern und anwenden (z. B. Linearkombination und lineare Abhängigkeit)*** • ***Funktionen als Eingabe-Ausgabe-Beziehung verstehen, die keine Kenntnis über implementierenden Algorithmus erfordert*** • Erkennen, wann Aufgabenstellung zum Fach gehört, wann Fachmann kontaktiert werden sollte • ***Beurteilen, ob Symbol eine Variable, Parameter usw. ist*** • ***Aussagen über Lösung mathematischer Probleme treffen, ohne Lösung vorher bestimmen zu müssen***
Methodisch		• ***Aus Texten Inhalte erarbeiten ("konstruieren")***	• Analysieren, beurteilen, was in Textstudium unklar geblieben ist • ***Verknüpfung zwischen Konzepten konstruieren mit dem Ziel Kohärenz/Konsistenz der Konzepte als verbindendes Fundament des Fachs zu sehen***
Sozial		• Gutes Argument konstruieren • „How do you know?"-Fragen beantworten • Selbstbewusstsein	• Zentrale Konzepte und deren Formalisierung erklären (z. B. Vektor)
Persönlich		• epistemologische Fragen (Why is this worth learing? How can you know that?) beantworten • kontinuierlich arbeiten	• Verantwortung für Lernprozess übernehmen

Funktionenaufgabe

In jeder der drei nachfolgenden Fragen sind f, g und h Funktionen (aber jeweils andere Funktionen), deren Definitions- und Wertemenge die Menge aller reellen Zahlen ist. Außerdem ist $h = f \circ g$.

a) Ist es möglich $h(0)$ zu bestimmen, wenn nur die in der Tabelle gegebene Information verfügbar ist? Wenn ja, geben Sie den Wert an. Wenn nein, erklären Sie, warum das nicht möglich ist.

x	$f(x)$	$g(x)$
-1	2	-3
0	-3	-1
4	1	2

b) Ist es möglich $f(2)$ zu bestimmen, wenn nur die in der Tabelle gegebene Information verfügbar ist? Wenn ja, geben Sie den Wert an. Wenn nein, erklären Sie, warum das nicht möglich ist.

x	$h(x)$	$g(x)$
-1	1	-3
4	π	1
π	0	2

c) Ist es möglich $g(4)$ zu bestimmen, wenn nur die in der Tabelle gegebene Information verfügbar ist? Wenn ja, geben Sie den Wert an. Wenn nein, erklären Sie, warum das nicht möglich ist.

x	$h(x)$	$f(x)$
-1	1	-2
2	3	1
4	-2	π

Lehrveranstaltungsevaluation

Evaluationsfragen kommunizieren Lehrverständnis und steuern deshalb potentiell studentisches Lernen.
„Die Lehrinhalte werden für mich verständlich vermittelt" beinhaltet die mögliche implizite Botschaft „Ob ich etwas verstehe, liegt primär in der Verantwortung der Lehrenden".
Auch Evaluationsfragen müssen mit anderen Aspekten der Lehrveranstaltung im Einklang stehen.

Jedes Fach, bzw. jeder Beruf, arbeitet mit bestimmten Methoden und Herangehensweisen. Inwieweit konnten Sie durch den Besuch dieser Veranstaltung in diesem Bereich Kompetenzen verbessern?	Trifft voll zu	Trifft überwiegend zu	Trifft teilweise zu	Trifft kaum zu	Trifft gar nicht zu
Ich kann mir aus Fachtexten selbst Inhalte erarbeiten.	7	13	13	6	2
Ich kann nach dem Lesen von Fachtexten formulieren, was ich nicht verstanden habe.	10	14	7	8	2
Ich kann ein gutes Argument konstruieren, um andere von der Richtigkeit eines Sachverhalts zu überzeugen.	6	14	13	5	3

Aufgabenbeispiele

Examplifikationsaufgabe

a) Nennen Sie eine Linearkombination (in Spaltentupelform) von $(1,-3,-4)^T$ und $(7,-9,-9)^T$.

b) Ist die von Ihnen in Teil a) genannte Linearkombination linear abhängig oder linear unabhängig von $(1,-3,-4)^T$ und $(7,-9,-9)^T$? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Nennen Sie einen Vektor (in Spaltentupelform), der orthogonal zu $(1,-3,0)^T$ ist.

d) Nennen Sie eine Matrix C, so dass die Multiplikation $C \cdot B$ mit
$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$$
ausführbar ist.

e) Nennen Sie ein Beispiel für eine (2×3)-Matrix, deren Rang gleich 1 ist.

f) Nennen Sie ein Beispiel für $c \epsilon \mathbb{R}^3$ mit $|c| = \sqrt{5}$.

Leseaufgabe

Modulprüfung Mathematik für die Informatik - WS 2012/13 7

Aufgabe 6 (nur Lineare Algebra und Modulprüfung) (Punkte: 5+1+3+2+3+1)

Lesen Sie sich zunächst den folgenden Text durch und beantworten Sie dann die nachfolgende Aufgabenstellung:

Die Differentiation ist eine Abbildung, die jeder differenzierbaren Funktion ihre Ableitungsfunktions zuweist. Wegen
$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$$
für beliebige Funktionen f und g und Skalare α und β ist die Differentiation eine lineare Abbildung. Da jede lineare Abbildung durch eine Matrix dargestellt werden kann, kann auch die Differentiation mittels Matrix dargestellt werden. Wir tun dies am Beispiel von Polynomen vom (maximalen) Grad 3 und ennen die entsprechende Matrix $\underline{\underline{D}}$.

Jedes Polynom vom Grad 3
$$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
kann eineindeutig als Viertupel
$$\underline{p} = (a_3, a_2, a_1, a_0)^\top$$
dargestellt werden. Die erste Komponente dieses Tupels ist also der Koeffizient a_3 des Polynoms p, die zweite Komponente ist der Koeffizient a_2 usw.

Die Ableitungsfunktion p' des Polynoms $p(x)$ ist durch den Ausdruck
$$p'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$$
gegeben, wird also durch das Tupel
$$\underline{p}' = (0, 3a_3, 2a_2, a_1)^\top$$
repräsentiert.

Die Matrix $\underline{\underline{D}}$, die die Differentiation repräsentiert, muss $\underline{p}' = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{p}$ erfüllen und daher eine 4×4-Matrix sein. Das bedeutet
$$\begin{aligned} \underline{\underline{D}} \cdot \underline{p} &= \begin{pmatrix} D_{1,1} & D_{1,2} & D_{1,3} & D_{1,4} \\ D_{2,1} & D_{2,2} & D_{2,3} & D_{2,4} \\ D_{3,1} & D_{3,2} & D_{3,3} & D_{3,4} \\ D_{4,1} & D_{4,2} & D_{4,3} & D_{4,4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_0D_{1,4} + a_1D_{1,3} + a_2D_{1,2} + a_3D_{1,1} \\ a_0D_{2,4} + a_1D_{2,3} + a_2D_{2,2} + a_3D_{2,1} \\ a_0D_{3,4} + a_1D_{3,3} + a_2D_{3,2} + a_3D_{3,1} \\ a_0D_{4,4} + a_1D_{4,3} + a_2D_{4,2} + a_3D_{4,1} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 3a_3 \\ 2a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \underline{p}' \end{aligned}$$
Weil die Koeffizienten a_3, a_2, a_1, a_0 beliebig sind, lassen sich daraus direkt die Koeffizienten der Matrix $\underline{\underline{D}}$ ablesen und wir erhalten
$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Von welchen der folgenden Funktionen kann mit Hilfe der Matrix D die Ableitung berechnet werden? Begründen Sie Ihre Antwort und berechnen Sie die Ableitung mit Hilfe der Matrix D, falls dies möglich ist.
$f(x) = -5x^3$,
$g(x) = -5x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 1$,
$h(x) = \cos(x) \cdot x^2$

b) Zeigen Sie, dass der Rang der Matrix D kleiner 4 ist.

c) Welche Konsequenz hat Rang$(D) < 4$ für die Lösung des LGS $D \cdot y = (0,1,1,1)^T$?

d) Kann man zu Ihrer Antwort auf Teil (c) auch ausgehend von der Differential- und Integralrechnung kommen? Wenn ja, wie?

e) Lösen Sie das LGS $D \cdot y = (0,1,1,1)^T$ mit einer Methode Ihrer Wahl.

f) Welche Rolle hat y in $D \cdot y = (0,1,1,1)^T$?
(A) Konstante (B) Parameter (C) Unbekannte (D) Variable
Begründen Sie Ihre Antwort!

Dieses Vorhaben wird aus Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung unter den Förderkennzeichen 01PL11059 und 01PL11066H gefördert. Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung liegt beim Autor.

GEFÖRDERT VOM
Bundesministerium für Bildung und Forschung